Vektoren in der Physik

Vektoren sind Größen, die eine Länge und eine Richtung haben. Dazu gehören:

- Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft
- Drehgrößen wie Drehimpuls, Drehmoment – wobei die Richtung durch die Drehachse gegeben ist.
- elektrische und magnetische Feldstärke

*Nicht gerichtet sind die anderen Größen der Physik (sogenannte **Skalare**)*

- *Fläche, Volumen, Dichte*
- *Arbeit, Leistung und Energie*
- *Temperatur und Druck*
- *Frequenz und Wellenlänge*
- *Masse und Zeit*

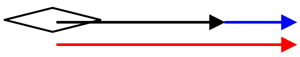
Bewegung eines Schiffes:

http://www.physik.uni-muenchen.de/leifiphysik/web_ph08/grundwissen/07_kraftadd_zerl/gruwi_kraefteadd_zerl.htm

(A) Wenn ein Schiff in Richtung **flussabwärts** fährt, so **addieren** sich die Geschwindigkeiten von Schiff (20 km/h) und Fluss (10km/h) das sieht dann so aus:

in Zahlen: 20 km/h + 10 km/h = 30 km/h und vektoriell: $\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$

grafisch:

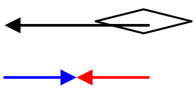


(schwarz ist die Schiffsgeschwindigkeit, blau die Flussgeschwindigkeit und rot die resultierende Geschwindigkeit)

(B) Wenn ein Schiff in Richtung **flussabwärts** fährt, so **addieren** sich die Geschwindigkeiten von Schiff (20 km/h) und Fluss (10km/h) das sieht dann so aus:

in Zahlen: 20 km/h – 10 km/h = 10 km/h und vektoriell: $\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

grafisch:

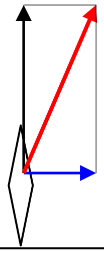


(schwarz ist die Schiffsgeschwindigkeit, blau die Flussgeschwindigkeit und rot die resultierende Geschwindigkeit)

(C) Wenn ein Schiff in Richtung **normal** zur Flussrichtung fährt, so **addieren** sich die Geschwindigkeiten von Schiff (20 km/h) und Fluss (10km/h) **nicht mehr auf die einfache Art**, sondern nur mehr **vektoriell** – das sieht dann so aus:

vektoriell: $\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

grafisch:



(schwarz ist die Schiffsgeschwindigkeit, blau die Flussgeschwindigkeit und rot die resultierende Geschwindigkeit)

Jetzt ergibt sich die Frage, wie schnell das Boot eigentlich wirklich ist,
- in Bezug auf den Fluss (von einem Fischauge aus gesehen)
- in Bezug auf das Boot (von einem Passagier aus gesehen)
- in Bezug auf das Ufer (von einem Beobachter am Ufer aus gesehen)

Hier fängt schon die Relativitätstheorie an. Es ist nicht egal, von welchem Betrachter ich ausgehe.
- Der Fisch–Beobachter im Fluss stellt fest, dass das Boot mit 20 km/h normal zur Flussrichtung unterwegs ist
- Der Beobachter am Boot merkt überhaupt keine Bewegung – 0 km/h
- Der Beobachter am Ufer kann feststellen, dass das Boot zwar normal auf die Flussrichtung eingestellt ist, es aber langsam abdriftet, so dass sich eine Bewegung in einem Winkel zur Flussrichtung ergibt. Auch die endgültige gemeinsame Geschwindigkeit von Boot und Fluss lässt sich schätzen: sie etwas größer als die Bootsgeschwindigkeit

Wie groß ist die resultierende Geschwindigkeit aber nun genau ?

Dazu müssen wir den guten alten Pythagoras ausgraben. In dem rechtwinkeligen Dreieck gilt der Satz: $a^2 + b^2 = c^2$

Was ist nun aber a,b,c ?

a ist eine Kathete, also hier z.B. die Bootsgeschwindigkeit 20 km/h
b ist eine Kathete, also hier die Flussgeschwindigkeit mit 10 km/h
c ist dann die resultierende Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} \approx 22{,}4 \quad km/h$$

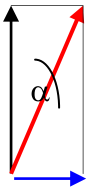
Wie sieht das mit den Vektoren aus?

$\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ ➔ der resultierende Vektor hat den **Betrag**

$$\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500} \approx 22{,}4 \quad km/h$$

In welchem Winkel fährt nun das Schiff über den Grund?

Dazu müssen wir die Trigonometrie ausgraben:



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Der Winkel α lässt sich mit dem TANGENS berechnen:

$$\tan \alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{b}{a} = \frac{20}{10} = 2 \;\Rightarrow\; \alpha = \tan^{-1}(2) \approx \mathbf{63°}$$

Applet dazu: http://www.cornelsen.de/physikextra/htdocs/bewegung_1.html
Kräfteaddition beim Schleppen eines Schiffes mit 2 Schleppern: http://www.zum.de/dwu/depotan/apme007.htm
Vektorsumme mit Ziehmodus: http://www.fh-lueneburg.de/mathe-lehramt/algebra/linalg/vektorsumme.html
Coulombsches Gesetz bei drei Ladungen http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/11/coulomb/coul_bsp.htm
Kraftaufgaben: http://www.physik.uni-muenchen.de/leifiphysik/web_ph08/musteraufgaben/07_kraftaddition/index.htm
Test: http://www.physik.uni-muenchen.de/leifiphysik/leifitest/quiz/sq08_07.htm
Kräfteparallelogramm: http://iva.uni-ulm.de/physik/vorlesung/mechanik/node5.html
Kräfte mit Applets: http://schulen.eduhi.at/riedgym/physik/9/kraefte/start_kraefte.htm
3D–Vektoren: http://www.mathe-online.at/galerie/vect1/vect1.html

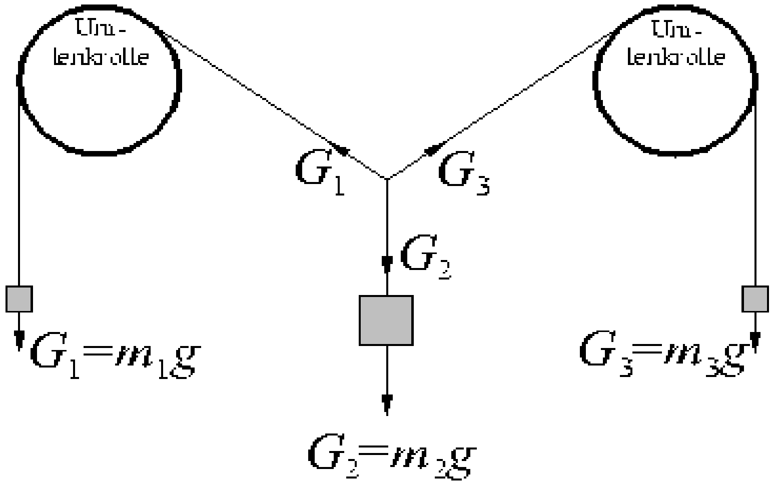
Aufgaben:

1) Ein Boot fährt mit 16 km/h. Der Fluss fließt mit 2,5 km/h.
   a. wie schnell fährt das Boot flussabwärts ? Wie lange braucht es so für eine Strecke von 75 km (Krems – Wien) ?
   b. wie schnell fährt das Boot flussaufwärts ? Wie lange braucht es jetzt für 75 km?
   c. wenn das Boot die 300m breite Donau mit Kurs normal zum Flussufer überquert, wie schnell ist es über Grund, in welchem Winkel fährt es über Grund? Wie lange dauert die Überfahrt?
   d. *) Welchen Winkel müsste das Boot fahren, um wirklich normal über Grund zu fahren? (zuerst schätzen, dann mit http://www.cornelsen.de/physikextra/htdocs/bewegung_1.html ausprobieren und zum Schluss die richtige Winkelfunktion suchen und berechnen!
   [18,5km/h + 4h3min, 13,5km/h + 5h33min, 16,2km/h + 81° + 1min7,5sec, 81°]

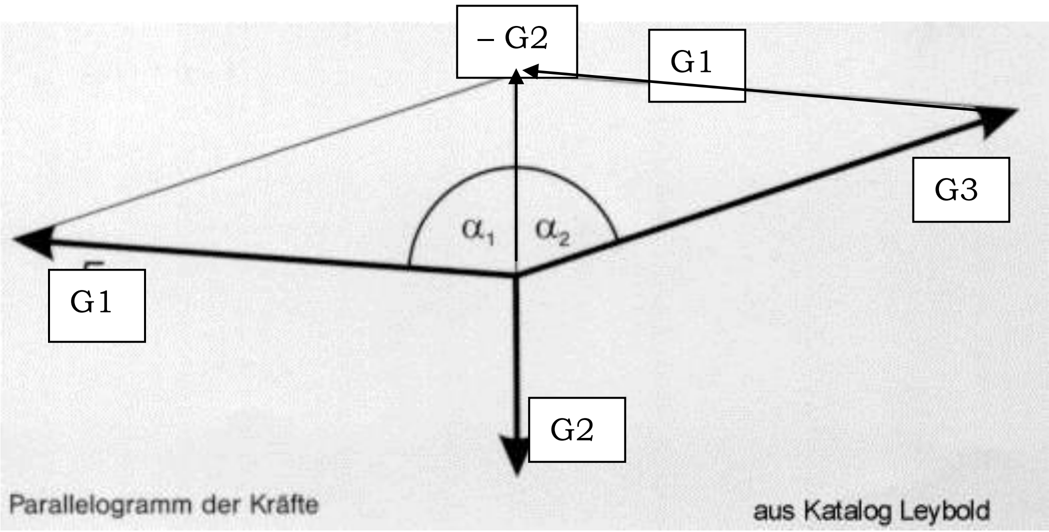
2) Ein Schiff fährt mit 10 km/h. Der Fluss fließt mit 4 km/h.
   a. wie schnell fährt das Boot flussabwärts ? Wie lange braucht es so für eine Strecke von 28 km?
   b. wie schnell fährt das Boot flussaufwärts ? Wie lange braucht es jetzt für 28 km?
   c. wenn das Boot den 300m breiten Fluss mit Kurs normal zum Flussufer überquert, wie schnell ist es über Grund, in welchem Winkel fährt es über Grund? Wie lange dauert die Überfahrt?
   d. *) Welchen Winkel müsste das Boot fahren, um wirklich normal über Grund zu fahren? (zuerst schätzen, dann mit http://www.cornelsen.de/physikextra/htdocs/bewegung_1.html ausprobieren und zum Schluss die richtige Winkelfunktion suchen und berechnen!
   [14km/h + 2h, 6km/h + 4h40min, 10,8km/h + 68,2° + 1,8min, 66,4°]

Seilbeispiel – Kräfteaddition:

Folgende Aufgabe gibt es oft zu berechnen: Wie stellt sich ein Gleichgewicht dreier Kräfte ein, wenn ein Seil gespannt ist:



Nehmen wir zuerst an, dass **die Kräfte G_1, G_2 und G_3 gleich groß** sind. Aus der Regel, dass sich alle drei Kräfte zu Null addieren müssen $G_1 + G_3 + G_2 = 0$ (sonst gäbe es ja Bewegung) ergibt sich, dass die Summe zweier Kräfte gleich der dritten $G_1 + G_3 = -G_2$ sein muss, das sähe etwa so aus:



Da hier $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ sein muss, so ergibt sich aus dem gleichschenkeligen Dreieck mit dem COSINUS: $\cos\alpha = \frac{G_2/2}{G_3} = \frac{G_3/2}{G_3} = \frac{1}{2}$ ➔ $\alpha = \cos^{-1}(0,5) = 60°$

Also ist das Ganze ein <u>doppeltes gleichseitiges Dreieck!</u>

<u>Im allgemeinen Fall gilt der Cosinussatz:</u>

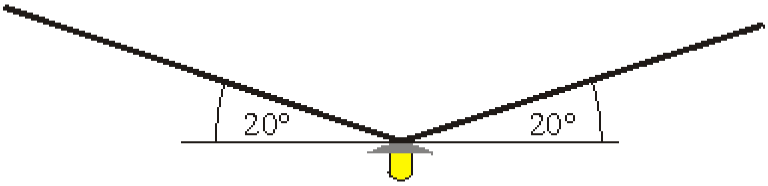
$$\cos\alpha_2 = \frac{G_1^2 - G_2^2 - G_3^2}{-2G_2G_3} \quad \text{und} \quad \cos\alpha_1 = \frac{G_3^2 - G_2^2 - G_1^2}{-2G_2G_1}$$

damit kann man die 2 Winkel berechnen!

❖ *und ausprobieren:* **http://www.walter-fendt.de/ph14d/gleichgewicht.htm**

Aufgaben:

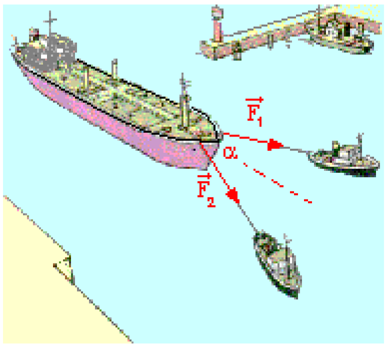
3) Eine Straßenlampe des Gewichts G = 200 N hängt an zwei Seilen, die jeweils unter α = 20° geneigt sind.
http://www.physik.uni-muenchen.de/leifiphysik/web_ph08/musteraufgaben/07_kraftaddition/kraftadd1/kraftaddition1_a.htm



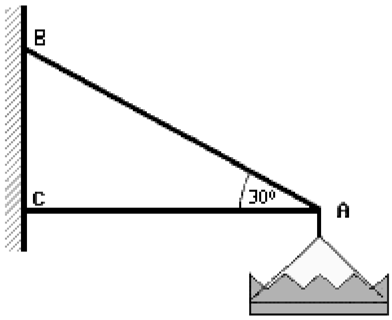
a. Welche Zugkraft tritt in einem Seil auf? (zeichnerische Lösung)
b. Im Winter ziehen sich die Seile etwas zusammen. Der Durchhang wird kleiner. Wird die Zugkraft dadurch kleiner oder größer?
c. Ist es möglich, die Aufhängeseile so zu spannen, dass beide genau in einer Geraden verlaufen, der Durchhang also völlig verschwindet?

[290 N je Seil | größer | nein, Kraft wäre unendlich in den Seilen!]

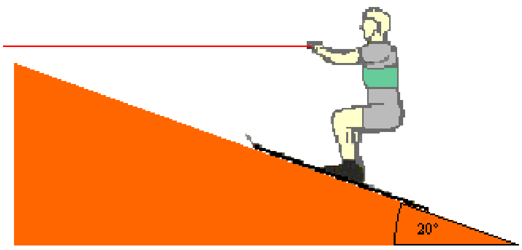
4) Große Frachtschiffe werden oft durch kleine Schlepper in den Hafen gezogen. Die beiden Schlepper ziehen symmetrisch zur Fahrtrichtung jeweils mit einem Kraftbetrag von 10kN. Die beiden Schleppseile bilden einen Winkel a = 60°. Mit welcher Kraft wird das Frachtschiff in Fahrtrichtung gezogen? Zeichnerische Lösung! *[17,3 kN]*



5) Gasthaus zur Krone
Eine Krone (G = 0,20 kN) hängt als Wirtshausschild an der skizzierten Stabverbindung.
Welche Kräfte wirken im Punkt A auf die Stäbe?
In welche Kräfte senkrecht ($\vec{F}_s$) und parallel ($\vec{F}_P$) zur Wand kann man die Kraft des Stabes in B zerlegen?
[0,37 kN; 0,20 kN]
Welche Kraft wirkt in C durch den Stab?
Zeichnerische Lösung!



6) Ein Wasserskifahrer wird durch ein Seil, das in horizontaler Richtung mit der Kraft von 400 N wirkt über eine Schanze gezogen (Neigung 20°).
Konstruiere in einer sauberen Skizze diejenigen Komponenten der Zugkraft, die parallel und senkrecht zur schiefen Ebene der Schanze wirken. *[137, 376]*

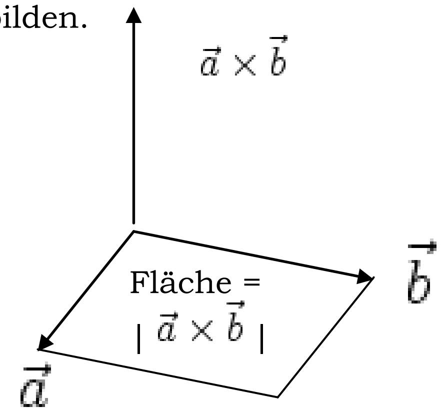


Vektoren im Raum und das Vektorielle Produkt

LINKS: http://www.mathe-online.at/galerie/vect1/vect1.html#vkenn
http://www.mathe-online.at/mathint/vect2/i.html#VektorProdukt

Das **Kreuzprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$ (auch **Vektorprodukt**, **vektorielles Produkt** oder **äußeres Produkt** genannt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in einem dreidimensionalen Vektorraum ist ein *Vektor*, der

1. **senkrecht** auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht.
2. Die Länge dieses Vektors entspricht der **Fläche des Parallelogramms** mit den Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
3. Es gibt zwei solche Vektoren, die in entgegengesetzte Richtung weisen. Davon wird einer ausgewählt, so dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Vektor ihres Kreuzprodukts ein **Rechtssystem** bilden.



Beispiel:

a) Berechnen Sie die Fläche, die von den 2 Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}$ aufgespannt wird

b) Berechnen Sie den Vektor, der auf beide Vektoren senkrecht steht und 10 cm lang ist

Lösung:

Die praktische Berechnung des Kreuzprodukts erfolgt folgendermaßen:
die oberste Komponente entsteht durch Streichung der ersten Zeile der 2 Vektoren und Berechnung der entstehenden Determinante:
Hauptdiagonalenprodukt minus Nebendiagonalenprodukt:

$$\begin{pmatrix}\cancel{1}\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cancel{0}\\4\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 6\end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 3\cdot 4 = 12 - 12 = 0$$

Die 2.Komponente entsteht durch Streichung der 2.Zeile, usw:

Daraus entsteht das **Kreuzprodukt**:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&4\\3&6\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\3&6\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&0\\2&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot6-3\cdot4\\-[1\cdot6-3\cdot0]\\1\cdot4-2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist ein Vektor, der normal auf die Ausgangsvektoren steht:

Das kann man durch das **skalare Produkt** zeigen:

$$\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0\cdot1+(-6)\cdot2+4\cdot3=0-12+12=0$$ und

$$\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\4\\6\end{pmatrix}=0\cdot0+(-6)\cdot4+4\cdot6=0-24+24=0$$

a) Der Vektorbetrag von diesem Normalvektor ist gleichzeitig die Größe der Basisfläche:

$$\left|\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0^2+(-6)^2+4^2}=\sqrt{52}\approx7{,}2$$ Flächeneinheiten

b) Der 10 cm lange Normalvektor ergibt sich aus der Verlängerung des 7,2 cm langen Vektors auf 10cm durch Multiplikation mit 10 und Division durch 7,2:

$$\begin{pmatrix}0\\-6\\4\end{pmatrix}\cdot\frac{10}{7{,}2}=\begin{pmatrix}\frac{0}{7{,}2}\\-\frac{60}{7{,}2}\\\frac{40}{7{,}2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-8{,}3\\5{,}5\end{pmatrix}$$

Aufgaben:

7) Berechnen Sie das Kreuzprodukt von

a) $\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$

8) Berechnen Sie die Fläche, die von den 2 Vektoren $\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ aufgespannt wird und überlegen Sie, warum der Normalvektor in die z–Richtung zeigt

9) Berechnen Sie einen Vektor, der normal auf die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}$ steht. Wie lang ist er?

Lösungen: 7) $\begin{pmatrix}-3\\-2\\11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\0\\-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\0\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}$ → A=20 9) $\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$ Länge = 10